

Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №2»
г. Уржума Кировской области

ТАКОЙ ЗАГАДАЧНЫЙ ПАРАМЕТР

Программа факультативного курса
для учащихся 11 класса

Составитель программы:
Сучкова Е.В., учитель математики 1 категории

Уржум, 2023

Пояснительная записка

Сегодня нет необходимости доказывать актуальность темы «Задачи с параметрами» в рамках обучения математике в школе, так как они практически не представлены в школьном курсе математики. Между тем они часто встречаются в заданиях ЕГЭ. Для решения задач с параметрами не требуется обладать знаниями, выходящими за рамки школьной программы. Однако непривычность формулировки обычно ставит в тупик учащихся, не имеющих опыта решения подобных задач.

Знакомство с параметрами в школьной алгебре полезно не только для успешной сдачи ЕГЭ, но само по себе. Ведь задача с параметром предполагает не только умение производить какие-то выкладки по заученным правилам, но также и понимание цели выполняемых действий. Для успешного решения таких задач необходимо рассматривать различные случаи, что приучает к внимательности и аккуратности. Даже при записи ответа нужно быть предельно сосредоточенным, чтобы не упустить ни одной из его частей, полученных в ходе решения. Подчас задачи с параметрами требуют довольно тонких логических рассуждений. Решение задач с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Данные задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры школьников, поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами. Важность понятия параметра связана с тем, что, как правило, именно в терминах параметров происходит описание свойств математических объектов: функций, уравнений, неравенств. Решение задач с параметрами требует исследования, даже если это слово отсутствует в формулировке задачи. Недостаточно механического применения формул, необходимо понимание закономерностей, наличие навыка анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, системность и последовательность в решении, умение объединить рассматриваемые частные случаи в единый результат.

Курс «Такой загадочный параметр» рассчитан на учащихся 10-11 класса, имеющих хороший уровень математической подготовки, и призван помочь им подготовиться к успешной сдаче экзамена по математике в форме ЕГЭ.

Цель: создать условия для изучения методов решения задач избранного класса и формирования умений, направленных на реализацию этих методов.

Задачи:

1. Сформировать у учащихся представление о задачах с параметрами как задачах исследовательского характера, показать их многообразие.
2. Научить применять аналитический метод в решении задач с параметрами.
3. Научить приемам выполнения изображений на плоскости и их использованию в решении задач с параметрами.
4. Научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать данный выбор.
5. Способствовать подготовке учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ.

Аннотация курса «Такой загадочный параметр»

Название этого курса у одних вызывает страх и ужас, а других завораживает, интригует. Надеюсь, вы из тех, кого завораживает. Если так, то вам будет интересно узнать, что такое параметр и какими методами можно его отыскать. Задача с параметром предполагает не только умение производить какие-то выкладки по заученным правилам, но также и понимание цели выполняемых действий. Данные задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры школьников, поэтому те учащиеся, которые владеют методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами.

К этому хочется добавить, что тот, кто действительно желает познакомиться с содержанием этого курса и мечтает об исследовательской деятельности, сможет приобрести нужные знания, умения и навыки по решению задач, изучая этот курс, насыщенный интересными и разнообразными задачами.

Учебно-тематическое планирование

Данный курс по выбору предполагает 34 занятия

№	Тема	час	Форма занятия		Контроль
			теория	практика	
1	Введение. Понятие о задачах с параметром	1	лекция		Записи в тетради
	<i>Аналитические методы решения задач с параметрами</i>	20	8	12	Самостоятельная работа, дискуссия, семинар, выполнение домашних работ.
2	Решение линейных уравнений с параметром	2		+	
3	Количество корней уравнения с параметром	2		+	
4	Решение линейных неравенств с параметром	2	+	+	
5	Решение дробно-линейных уравнений с параметром	2		+	
6	Решение дробно-линейных неравенств с параметром	2		+	
7	«Каркас» квадратичной функции	2	+	+	
8	Задачи на расположение корней квадратного трехчлена	4	+	+	
9	Системы уравнений и неравенств с параметром	1	+	+	
10	Параметр в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах	1	+	+	
11	Параметр в иррациональных уравнениях и неравенствах	1	+	+	
12	Параметр в задачах математического анализа	1	+	+	
	<i>Использование графических интерпретаций в решении задач с параметрами</i>	5	1	4	Самостоятельная работа, дискуссия, семинар, выполнение домашних работ.
13	Функции и графики (повторение)	1		+	
14	Графические приемы решения задач с параметрами	4	+	+	Защита творческой работы (решение определенных задач из ЕГЭ за прошедшие годы, каждый участник получает свою работу)
15	<i>Задачи с параметром в ЕГЭ</i>	8	-	8	

Содержание программы

Отдельные вопросы программы по своим формулировкам дублируют вопросы учебных программ по математике, но рассмотрение тих вопросов призвано систематизировать знания учащихся и подготовить их к работе с подобными объектами в задачах с параметрами. При решении уравнений сделан акцент на специфике уравнений каждого вида с целью ее использования для нахождения контрольных значений в задачах с параметрами; рассмотрение свойств функций направлено на отработку умений выполнять преобразования графиков.

Содержание программы определяется следующими требованиями и ограничениями:

- входящие в нее задачи должны допускать разный уровень выполнения, иметь ясную и интересную постановку, которая сама мотивировала бы ребят к исследованию;
- последовательность задач должна подчиняться определенной логике, основанной главным образом на постепенном усложнении исследовательских действий от задачи к задаче и учитывающей содержание программ и систематического курса математики;
- сценарий учебных занятий по выполнению исследовательских задач должен обязательно включать такие формы коммуникативной деятельности как работа в группе, участие в дискуссии, презентация полученных результатов.

№	Тема	час	Краткое содержание	Литература
1	<i>Введение. Понятие о задачах с параметром</i> Цель – сформировать понятие о параметре; познакомить с многообразием вопросов в задачах с параметром и основными методами их решений.	<i>1</i>	Понятие о параметре. Контрольные значения параметра. Основные методы решения задач с параметром.	<ul style="list-style-type: none">• № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса»• № 7 2007, с. 13. Жаворонкова Т. «Советы по установлению добрых отношений с параметрами»

<p>Аналитические методы решения задач с параметрами.</p> <p>Цель – систематизировать умения в решении уравнений и неравенств, сформировать умения решать их виды с параметрами.</p>	20	
<p>2 Решение линейных уравнений с параметром</p>	2	<p>Повторить алгоритм решения линейных уравнений, рассмотреть частные случаи в зависимости от параметра.</p> <ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Солуковцева Л.А. Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Издательство «ООО «Чистые пруды». Москва. 2007.
<p>3 Количество корней уравнения с параметром</p>	2	<p>Рассмотреть случаи нахождения количества корней в зависимости от параметра.</p> <ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Солуковцева Л.А. Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Издательство «ООО «Чистые пруды». Москва. 2007.

4	Решение линейных неравенств с параметром	2	Повторить алгоритм решения линейных неравенств, рассмотреть частные случаи в зависимости от параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Солуковцева Л.А. Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Издательство «ООО «Чистые пруды». Москва. 2007.
5	Решение дробно-линейных уравнений с параметром	2	Рассмотреть алгоритм решения дробно-линейных уравнений, определять количество корней в зависимости от параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • № 16 2004, с. 13. Горшенина Т. «Задачи с параметром. Квадратные уравнения и неравенства» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Солуковцева Л.А. Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Издательство «ООО «Чистые пруды». Москва. 2007.
6	Решение дробно-линейных неравенств с параметром	2	Рассмотреть алгоритм решения дробно-линейных неравенств, в частности метод интервалов.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • № 16 2004, с. 13. Горшенина Т. «Задачи с параметром. Квадратные уравнения и неравенства» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.

7	«Каркас» квадратичной функции	2	Рассмотреть случаи расположения параболы относительно оси абсцисс, использования вершины параболы и теоремы Виета о корнях квадратного уравнения.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • № 16 2004, с. 13. Горшенина Т. «Задачи с параметром. Квадратные уравнения и неравенства» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Лекции с курсов при КИПК и ПРО. 2007.
8	Задачи на расположение корней квадратного трехчлена	4	Применение «каркаса» квадратичной функции, теоремы Виета для записи условий расположения корней квадратного трехчлена.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • № 43, 44 2004, с. 23. Голубев В. «О расположении корней квадратного трехчлена» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
9	Системы уравнений и неравенств с параметром	1	Решение систем с учетом условий параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998. • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
10	Параметр в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах	1	Повторить алгоритм решения уравнений, рассмотреть количество корней в зависимости от параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005. • Чулков П.В. Лекции с курсов повышения квалификации при Издательском доме «Первое сентября». Москва. 2006.

11	Параметр в иррациональных уравнениях и неравенствах	1	Повторить алгоритм решения уравнений, рассмотреть количество корней в зависимости от параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса»
12	Параметр в задачах математического анализа	1	Рассмотреть задачи на производную с условиями параметра.	<ul style="list-style-type: none"> • № 18 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса» • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
Использование графических интерпретаций в решении задач с параметрами Цель – сформировать представление о методах решения с использованием геометрических приемов.		5		
13	Функции и графики (повторение)	1	Повторить алгоритм построения графиков функций.	<ul style="list-style-type: none"> • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
14	Графические приемы решения задач с параметрами	4	Рассмотреть решение задач с параметрами с применением графических приемов.	<ul style="list-style-type: none"> • Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
15	Задачи с параметром в ЕГЭ Цель – анализ исходных данных задачи с параметром и выбор метода решения.	8	Выбор учащимися задания из варианта ЕГЭ и подготовка творческого отчета.	<ul style="list-style-type: none"> • Варианты заданий ЕГЭ за 2002-2008 годы

Ожидаемые результаты

В результате изучения курса учащиеся должны:

- уметь решать уравнения, неравенства и их системы с одним параметром при всех значениях параметра;
- использовать в решении задач с параметром свойства линейной и квадратичной функций;
- использовать свойства функций и уравнений при изображении множеств точек плоскости;
- овладеть методами решения задач с параметрами с использованием графических интерпретаций;
- осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;
- владеть техникой использования каждого метода.

Библиографический список

1. Величко М.В. Проектная деятельность учащихся. Математика. 9-11 классы. Издательство «Учитель». Волгоград. 2006. с.101.
2. Газета «Математика» 2004-2007 год
 - а) № 14 2007, с.33. Четвериков А. «Задачи с параметрами. Программа».
 - б) № 18, 19 2004, с.23. Креславская О. «Задачи с параметром в итоговом повторении 11 класса».
 - в) № 16 2004, с. 13. Горшенина Т. «Задачи с параметром. Квадратные уравнения и неравенства».
 - г) № 7 2007, с. 13. Жаворонкова Т. «Советы по установлению добрых отношений с параметрами».
 - д) № 43, 44 2004, с. 23. Голубев В. «О расположении корней квадратного трехчлена».
 - е) № 2, 3, 5, 7, 12, 13, 14, 17, 21 2005, № 4 2006. Голубев В. «Школа решения нестандартных задач. Задачи с параметрами».
3. Здоровенко М.Ю. Сборник задач по элементарной математике. ВГПУ. Киров. 1998.
4. Здоровенко М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами. ВГПУ. Киров. 1999.
5. Полонский В.Б. Задачи с параметрами. Издательство «Илекса». Москва. 2005.
6. Солуковцева Л.А. Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Издательство «ООО «Чистые пруды». Москва. 2007.
7. Чулков П.В. Лекции «Уравнения и неравенства в школьном курсе математики». Москва. педагогический университет «Первое сентября». 2006.

Занятие № 1.

Знакомство с параметром

Рассмотрим уравнения $2x + 5 = 7$, $8x + 5 = 7$, $-\frac{1}{3}x + 5 = 7$

В общем виде эти уравнения можно записать так $kx + 5 = 7$, k – некоторое число. Обычно в уравнении или неравенстве буквами обозначают неизвестные. Решить уравнение (неравенство) – значит найти множество значений неизвестных, удовлетворяющих этому уравнению (неравенству). Иногда уравнения (неравенства), кроме букв, обозначающих неизвестные, содержат другие буквы, называемые **параметрами**.

ПАРАМЕТР (от греческого *παράμετρον* – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой. Например, в декартовых прямоугольных координатах уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ определяется множество всех окружностей радиуса 1 на плоскости xOy ; полагая, например, что $a=3$, $b=4$, выделяют из этого множества вполне определенную окружность с центром $(3,4)$, следовательно, a и b суть параметра окружности в рассматриваемом множестве.

Решить уравнение или неравенство с параметром – значит, для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений этого уравнения или неравенства. Причем, существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем задачам, в которых возможны разные варианты ответов в зависимости от значений параметра (иногда говорят, что решение «ветвится» в зависимости от параметра).

В курсе школьной математики с параметрами мы встречаемся при введении некоторых понятий:

- функция прямая пропорциональность: $y = kx$ (x, y – переменные; k – параметр, $k \neq 0$);
- линейная функция: $y = kx + b$ (x, y – переменные; k, b – параметры);
- линейное уравнение: $ax + b = 0$ (x – переменная; a, b – параметры);
- уравнение первой степени: $ax + b = 0$ (x – переменная; a, b – переменные; $a \neq 0$);
- квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$ (x – переменная; a, b, c – параметры; $a \neq 0$).

1) При каком значении a уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$ имеет 1 корень?

2) Сравните $-a$ и $3a$.

Решение. Рассмотрим три случая:

если $a < 0$, то $-a > 3a$;

если $a = 0$, то $-a = 3a$;

если $a > 0$, то $-a < 3a$.

К задачам с параметрами можно отнести и поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Так, деление на выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из подобных выражений требуют предварительных исследований. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение и на ответ.

Основное, что нужно усвоить при знакомстве с параметром – это необходимость осторожного, даже деликатного обращения с фиксированным, но неизвестным числом.

Параметр встречается в различных задачах, но основными являются:

- линейные уравнения и неравенства
- квадратные уравнения и неравенства
- расположение корней квадратного трехчлена

Существуют аналитические и графические приемы решения задач с параметром.

Советы по установлению добрых отношений с параметром

1. Не бойся «незнакомца в маске».
2. Всегда анализируй условие поставленной задачи.

3. Различай параметр и неизвестную величину.
4. Если установлено, что в задаче играет роль параметра, постарайся через него выразить неизвестную величину.
5. Обращайся с параметром деликатно, проверяй возможность совершения тех или иных действий.
6. Учись проводить разветвления в ходе решения задачи, качественно изменяющие его в зависимости от возможных численных значений параметра. Предлагай испытания для параметра, заставляющие его «снимать маску».
7. Старайся привлекать графики для получения решения и интерпретации результатов.
8. Привыкай к использованию координатной плоскости, в которой по оси абсцисс откладываются параметр, а по оси ординат – неизвестная переменная.
9. Особое внимание уделяй представлению ответа, он может быть объемнее решения.
10. Не избегай встреч с параметром, не пасуй перед трудностями. Самое интересное может скрываться за трудно открываемыми дверями.

Занятие № 2

Линейные уравнения с параметром

Решите уравнения:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. $3x = 12$ | 8. $40x + 13a = \sqrt{a} + 15x$ |
| 2. $3x = a$ | 9. $3x + 9 = a \cdot (a - x)$ |
| 3. $ax = 12$ | 10. $(a + 1) \cdot x = a - 1$ |
| 4. $(m - 2) \cdot x = 4m$ | 11. $(a^2 + a) \cdot x = a^2 - 4a$ |
| 5. $8 + mx = 4x + 2$ | 12. $(a - 9) \cdot (x + 8) = 0$ |
| 6. $ax + 1 = x + a$ | 13. $a^2x - a^2 - x + a + 2 = 0$ |
| 7. $(a^2 - 4) \cdot x = a + 2$ | |

14. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 2) \cdot x = a + 4$ имеет корень не равный 3?
15. При каком значении параметра a уравнение $(x - 1) \cdot a = x - 2$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x > 1$?
16. При каком значении параметра a корень уравнения $2x - 28,5 = 2a \cdot (6x - 1)$ в два раза больше корня уравнения $4x + 1 = 2 \cdot (3 - 2x)$?
17. Найти все значения параметра m , при которых уравнение $m^2x = m \cdot (x + 2) - 2$ не имеет решений?
18. При каком значении параметра a уравнение $\frac{(x-1)(x-a)}{x-2} = 0$ имеет ровно одно решение?
19. Найдите число корней уравнения при разных значениях параметра

а) $\frac{y-m}{m} - 4 = \frac{y-4}{4} - m$	б) $ x-1 = ax + 2$	в) $ x-2 - 1 = a - 3x$
--	---------------------	-------------------------
20. При каких целых значениях параметра a корень уравнения $(a - 5) \cdot x + a = 3$ лежит в промежутке $[0; 5]$?
21. При каких значениях параметра a корень уравнения $2ax - 3 = 4x + a$ не меньше корня уравнения $5x - a \cdot (x + 1) = 0$?

Занятие № 3.

Соотношения между корнями уравнения с параметром

1. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2) \cdot x^2 + ax + 1 = 0$ имеет два различных корня?
2. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(2a+1) \cdot x^2 - 3(a+1) \cdot x + a+1 = 0$ имеет решения.
3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (a+1) \cdot x + 2a - 1 = 0$ не имеет корней?
4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a^2 - 6a + 8) \cdot x^2 + (a^2 - 4) \cdot x + (10 - 3a - a^2) = 0$ имеет не более двух решений?
5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - \sqrt{a^2 - 2a + 7} \cdot x + a = 0$ равна 4?
6. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $(a-2)x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + a - 4 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2 \geq 0$.
7. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2a \cdot x + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ является наименьшей? Чему равна эта сумма?
8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$ меньше 2.
9. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - 4a \cdot x + a + 14 = 0$ в три раза меньше другого?
10. При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $(a^2 - 5a + 3) \cdot x^2 + (3a - 1) \cdot x + 2 = 0$ равно 2?
11. Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a-1) \cdot x + 2a - 8 = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - x_2 = -6$, а $4x_1 < x_2$?
12. При каких a и b разность корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равна 5, а разность их кубов равна 35?

Занятие № 4
Линейные неравенства с параметром

Решите неравенства:

1. $ax > 1$
2. $(a-4) \cdot x < 12$
3. $-1 + 3ax \leq 6x + 10a$
4. $2mx - 10x \geq m - 5$
5. $(a^2 - 2a - 3) \cdot x \leq a + 1$
6. $a^2x - a^2 + 9 < x - 4 \cdot (a - 3)$
7. $x - 2 \cdot \frac{a-1}{a} \leq \frac{2}{3a} \cdot (x+1)$
8. $\frac{x}{a+2} > 2x - a$
9. $\frac{(a+2) \cdot x}{a-1} - \frac{2}{3} < 2x - 1$
10. При каких значениях параметра p неравенство $(p^2 - p - 2) \cdot x \leq p^5 - 4p^4 + 4p^3$ не имеет решений?
11. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax + x + 1 < 0$ являются решениями неравенства $x > 1$?
12. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax + x - 2a + 1 > 0$ являются решениями неравенства $x < a$?
13. При каких значениях параметра a все решения неравенства $(a-3) \cdot x > 5$ являются решениями неравенства $ax > 2$?

Занятие № 5
Дробно-линейные уравнения с параметром

Решите уравнения:

1. $\frac{2x-a}{x+2} = 0$
2. $\frac{4kx+5}{x-10} = 0$
3. $\frac{2x-a+1}{(a-2) \cdot x-3} = 0$
4. $\frac{(a+2) \cdot x-3a}{ax-1} = 0$
5. $\frac{ax}{3a-x} = 2$
6. $\frac{3}{kx-12} = \frac{1}{3x-k}$
7. $\frac{(a^2-4) \cdot x-a-2}{(a+1) \cdot x-4} = 0$
8. $\frac{3mx-5}{(m-1) \cdot (x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}$
9. При каких значениях параметра a все решения уравнения $\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x+2)^2 - x - 22}$ неположительны?

Занятие № 6
Дробно-линейные неравенства с параметром

Решите неравенства:

1. $\frac{x-a}{x+1} < 0$

2. $\frac{mx-1}{x-2} \geq 0$

3. $\frac{2ax+1}{4-2a \cdot x+2x} \leq 0$

4. $\frac{m}{(m+2)(x+3)} + \frac{2x+m}{(m+2)(x+3)} > -\frac{3}{x+3}$

5. $\frac{ax-3}{x-3} - \frac{a}{2} < a-1$

6. $\frac{(a+2)x}{a-1} - \frac{2}{3} < 2x-1$

7. $\frac{2x-1}{m+1} - \frac{x+1}{2(m-1)} > -\frac{2x-3}{m-1}$

8. $\frac{x}{x-2} < \frac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$

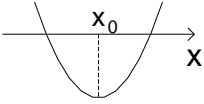
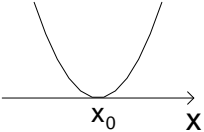
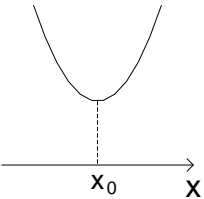
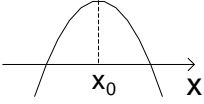
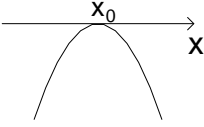
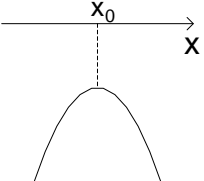
9. $\frac{2x+1}{(a-1)x} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{x}$

10. $\frac{3x+1}{a^2-1} - \frac{2x-1}{a-1} \leq \frac{x-1}{a+1}$

Занятие № 7

«Каркас» квадратичной функции

Рассмотрим все возможные случаи расположения параболы (графика квадратичной функции) относительно оси абсцисс.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Приведенные условия расположения параболы относительно оси абсцисс, показывают, что дискриминант и старший коэффициент (сюда также стоит еще добавить вершину параболы, которая задает расположение параболы относительно оси ординат) конструируют «каркас» квадратичной функции, с которым зачастую легче работать при решении задач с параметрами.

В ряде других задач при решении задачу сводим к исследованию вершины параболы. Она находится в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \tilde{n} - \frac{b^2}{4a}$. Вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$, проходящая через вершину параболы, является для нее осью симметрии. Множество значений квадратичной функции — это луч, конец которого является ординатой вершины параболы, т. е. либо $[-\frac{b^2}{4a} + c; +\infty)$, если $a > 0$, либо $(-\infty; -\frac{b^2}{4a} + c]$, если $a < 0$.

Для решения задач с параметрами часто используются формулы Виета. Эти формулы получаются из разложения квадратного трехчлена на сомножители: если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2$. Мы видим, что $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$. Неплохо иметь в виду и формулы для квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$: $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$, $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$. Хотя можно обойтись и без них: нужно только не забыть поделить все члены уравнения на коэффициент a . Итак, формулы Виета выражают сумму и произведение корней через коэффициенты уравнения при условии $a \neq 0$, $D \geq 0$

Соотношения между корнями квадратного уравнения:

- 1) корни имеют разные знаки $x_1 \cdot x_2 < 0$
- 2) корни положительны $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ -(x_1 + x_2) > 0 \end{cases}$
- 3) корни отрицательны $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 < 0 \\ -(x_1 + x_2) < 0 \end{cases}$
- 4) один из корней равен нулю $x_1 \cdot x_2 = 0$

1. При каких значениях параметра k уравнение $(5k-1) \cdot \tilde{\sigma}^2 - (5k+2) \cdot \tilde{\sigma} + 3k - 2 = 0$ не имеет корней?
2. При каких значениях параметра a многочлен $\tilde{\sigma}^2 + 2(a-9) \cdot \tilde{\sigma} + (a^2 + 3a + 4)$ можно представить в виде полного квадрата?
3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $\tilde{\sigma}^2 - (a-3) \cdot \tilde{\sigma} + (a^2 - 7a + 12) = 0$ равно 0?
4. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $\tilde{\sigma}^2 + (a^2 + 4a - 5) \cdot \tilde{\sigma} - a = 0$ равна 0?
5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $4\tilde{\sigma}^2 - a \cdot \tilde{\sigma} + a - 1 = 0$ равна 17?
6. При каких значениях параметра p корни уравнения $5\tilde{\sigma}^2 - 4(\tilde{\sigma} + 3) \cdot \tilde{\sigma} + 4 = \tilde{\sigma}^2$ противоположны по знаку?
7. Найти все a , при которых уравнение $(a+2) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 2a \cdot \tilde{\sigma} + 3a = 0$ имеет только неотрицательные корни.
8. Найти все a , при которых неравенство $a\tilde{\sigma}^2 + 4\tilde{\sigma} > 1 - 3a$ справедливо для всех положительных x .
9. При каких значениях параметра a все корни уравнения $(a+5) \cdot \tilde{\sigma}^2 + (2a-3) \cdot \tilde{\sigma} + a - 10 = 0$ отрицательны?
10. При каких значениях параметра t неравенство $\partial\tilde{\sigma}^2 + (2-\partial) \cdot \tilde{\sigma} + 3 - 2\partial \leq 0$ выполняется только для одного действительного значения x ?
11. При каких значениях параметра a неравенство $(a-3) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 2a \cdot \tilde{\sigma} + 3a - 6 > 0$ выполняется при всех значениях x ?
12. При каких значениях параметра a неравенство $(a+4) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 2a \cdot \tilde{\sigma} + 2a - 6 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

Расположение корней квадратного трехчлена

		$ax^2+bx+c=0 \quad x_1 \quad x_2 \quad A < B$	$f(x) = ax^2+bx+c$
1. Оба корня больше числа А. $\begin{cases} D \geq 0 \\ A < x_0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) < 0 \end{cases}$	1		
2. Число А лежит между корнями. $\Delta \cdot f(\hat{A}) < 0$	2		
3. Оба корня больше числа А $\begin{cases} D \geq 0 \\ A > x_0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) > 0 \end{cases}$	3		
4. Оба корня лежат между числами А и В. $\begin{cases} D \geq 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) > 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{B}) > 0 \end{cases}$	4		
5. $\begin{cases} D \geq 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) < 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{B}) > 0 \end{cases}$	5		
6. $\begin{cases} D \geq 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) > 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{B}) < 0 \end{cases}$	6		
7. Числа А и В лежат между корнями. $\begin{cases} D \geq 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{A}) > 0 \\ \Delta \cdot f(\hat{B}) > 0 \end{cases}$	7		

- При каких значениях параметра k оба корня уравнения $2\tilde{\sigma}^2 + k\tilde{\sigma} + k^2 - 14 = 0$ больше -1 ?
- Найти все a , при которых корни уравнения $\tilde{\sigma}^2 - 2(a-2) \cdot \tilde{\sigma} + 4 = 0$ находятся в интервале $(-4; 2)$.
- Найти все a , при которых уравнение $(a-2) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 2(a+3) \cdot \tilde{\sigma} + 4a = 0$ имеет два различных корня, один из которых меньше 2, а другой больше 3.
- При каких значениях параметра k корни уравнения $(2k-1) \cdot \tilde{\sigma}^2 + (3-k)\tilde{\sigma} + 1 = 0$ меньше 2?
- При каких значениях параметра a уравнение $\tilde{\sigma}^2 - 2\tilde{\sigma} + a = 0$ не имеет отрицательных корней?
- При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 2a\tilde{\sigma} + 2a - 3 = 0$ больше a ?

7. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 4a\tilde{\sigma}^3 + (12a + 3) \cdot \tilde{\sigma}^2 + 12x - 10$ убывает на отрезке $[-1; 2]$?
8. При каких значениях параметра a трехчлен $(a^2 - 1) \cdot \tilde{\sigma}^2 + 2(a - 1) \cdot \tilde{\sigma} + 2$ положителен для любого x ?
9. При каких целых значениях параметра m корни уравнения $m\tilde{\sigma}^2 + (2m - 1) \cdot \tilde{\sigma} + m - 2 = 0$ рациональны?
10. Найти все значения параметра a , при которых наибольшее значение функции $y = -\tilde{\sigma}^2 + 2ax - (a^2 - 2a + 3)$ на отрезке $[0; 1]$ равно -2 ?
11. Найти все a , при которых уравнение $2\tilde{\sigma}^2 - 2(2a + 1) \cdot \tilde{\sigma} + a \cdot (a + 1) = 0$ имеет два корня, один из которых меньше a , а другой больше a .
12. При каких значениях параметра a все решения неравенства $a\tilde{\sigma}^2 - 2(a^2 - 3) \cdot \tilde{\sigma} - 12a \geq 0$ являются решениями неравенства $x^2 - 49 \leq 0$?
13. При каких значениях параметра m неравенства $(6m - 5) \cdot \tilde{\sigma}^2 - 5 \cdot (m - 1)x + 2m - 6 > 0$ и $x^2 + 6x - 7 < 0$ имеют хотя бы одно общее решение?
14. При каких значениях параметра k из неравенства $\tilde{\sigma}^2 - (3k + 1)\tilde{\sigma} + k > 0$ следует неравенство $x > 1$?
15. Найти все отрицательные значения параметра a , при которых всякое решение неравенства $\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} - 2 < 0$ будет одновременно и решением неравенства $a\tilde{\sigma}^2 - (3a + 1)\tilde{\sigma} + 3 > 0$.